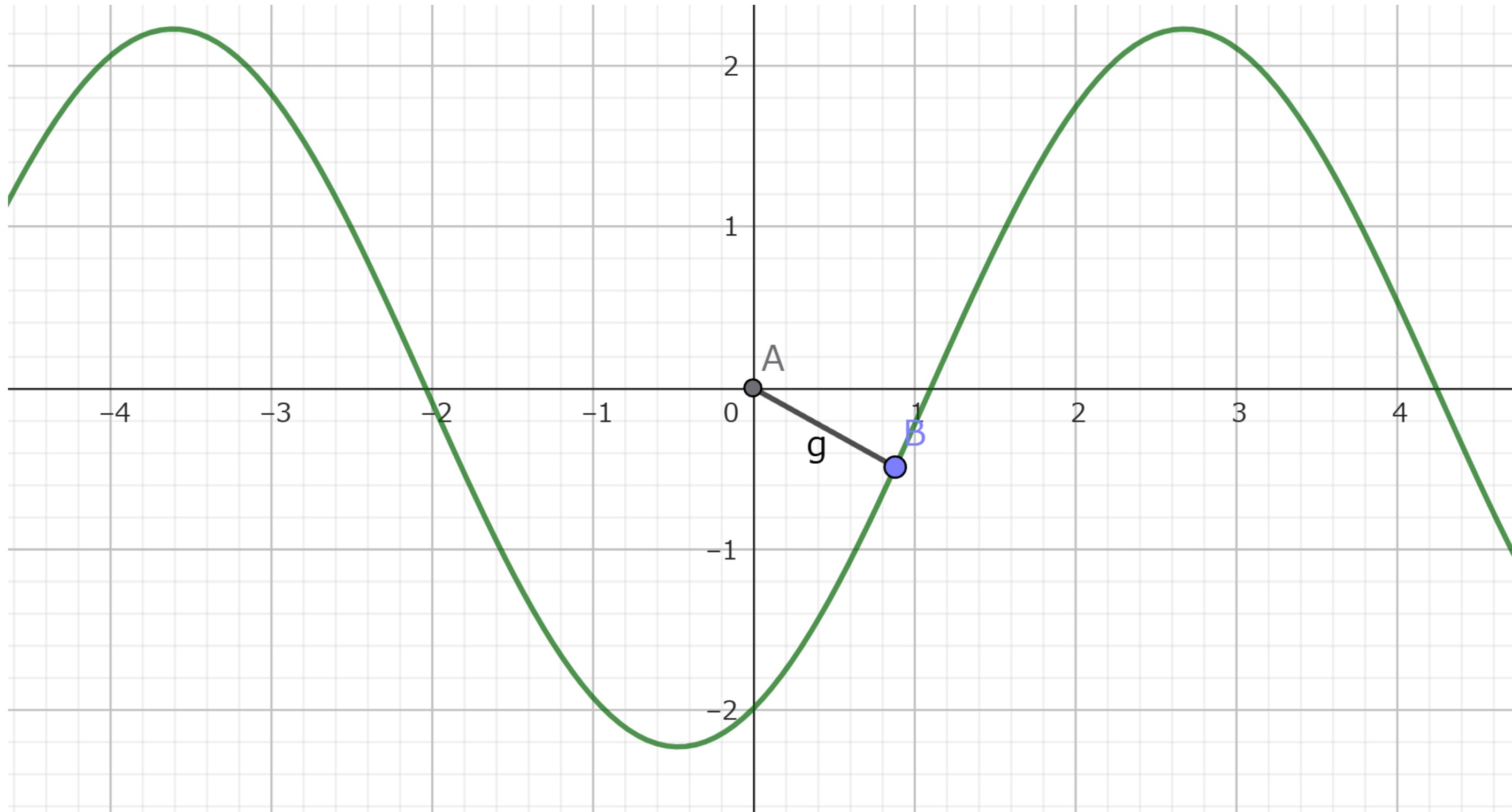


# 三角関数のグラフと原点との距離の最小値の求法

作新学院高等学校 石塚大翔 申玲大 関碧生 塚原涼介 中村優花 渡部瑛太

## [はじめに]

三角関数 $y = a \sin x + b \cos x$ のグラフが原点を通らないとき、原点とグラフの間には当たり前だが距離が存在する。この距離の最小値（下図の線分AB）を一般的に求めることが、今回の目標である。



## [方法]

原点と、グラフ上の1つの点との距離を $D$ とし、  
 $D = \sqrt{x^2 + (a \sin x + b \cos x)^2}$  を2乗したものを  $f(x)$  とする。  
ある区分に分け、解析的微分を用いて  $f'(x) = 0$  での無限個の極小点の中から最も小さい点を見つけ、その点での値が求める最小値となる。

## [過程]

$f(x) = D^2$  とする。距離の最小値を厳密に求めるためには、  
解析的微分を用いて  $f'(x) = 0$  での無限個の極小点の中から  
最も小さい点を見つける必要がある。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + (a \sin x + b \cos x)^2 \\ f'(x) &= 2x + (a \sin x + b \cos x)(a \cos x - b \sin x) \\ f'(x) &= 0 \text{ より } x + (a \sin x + b \cos x)(a \cos x - b \sin x) = 0 \\ &\dots * \end{aligned}$$

- ここで、次のことが言える
- I,  $\sin x$ 、 $\cos x$  は代数関数ではなく、超越関数である。
  - II, リウヴィルの定理、超越関数の非可解性より、これらが絡んだ非線形方程式は、一般には代数的に表すことができない。
  - III, 「 $x = (\text{解})$ 」の形を明示することができない  
(解析的には存在するが、代数的には不可能)

これら3つより、\*の解は一般には代数的に解くことができない。  
(初等関数での閉形式が存在しない)

よって、 $y = a \sin x + b \cos x$  と原点(0,0) との距離の最小値は一般的に求めることができず、近似解を出すことしかできない。

ここからは例外となる場合を考えていく。

三角関数の合成より、

$$y = a \sin x + b \cos x = R \sin(x + \alpha)$$

$$\text{※} R = \sqrt{a^2 + b^2}, \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right), a \neq 0$$

$\alpha = n\pi$  ( $n$ : 整数) のとき、 $y = R \sin(x + n\pi)$  と原点(0,0) との距離は0となる。

このように、代数的に解くことができる場合もある。

(右上に続く)

以上より、 $y = a \sin x + b \cos x$  と原点(0,0) との距離の最小値は一般には代数的に求めることはできず、近似解を出すことしかできない。  
ただし、例外もある。

## [重要用語]

- 解析的微分：  
数値の微小な差分を用いて近似的に微分値を求める数値微分と違い、微分の公式を用いて厳密に導関数を求める操作。
- 代数関数、超越関数：  
代数関数は、簡単に説明すると、四則演算及び累乗根を使った有限項の多項式で表せる関数のこと。二次関数などがこれに含まれる。  
一方、四則演算では表せないものや、項が無限に続いてしまうものを超越関数といい、三角関数や指数・対数関数などが含まれる。
- リウヴィルの定理：  
有理数で近似できすぎる無理数を超越数とし、代数数とは違う数として扱うことを述べた定理。この定理の発表後、ネイピア数 $e$ や円周率 $\pi$ は超越数であることが証明された。
- 超越関数の非可解性：  
超越関数は代数的な操作（＝四則演算、累乗、累乗根で有限回の操作で表すこと）では解を出すことができない。

## [今後の展望]

今回は三角関数が関わってきたため、一般に厳密解を出すことはできなかった。しかし、楕円や双曲線などであればそれらの図形の方程式から、原点からの最小距離を厳密に求められる可能性があるということである。  
また、三次元空間においても同様に超越関数でなければ求められるはずだ。