

星形正多角形の性質

作新学院高等学校

岸暖翔 高品央典 中溝秀 横関爽汰

【方針】

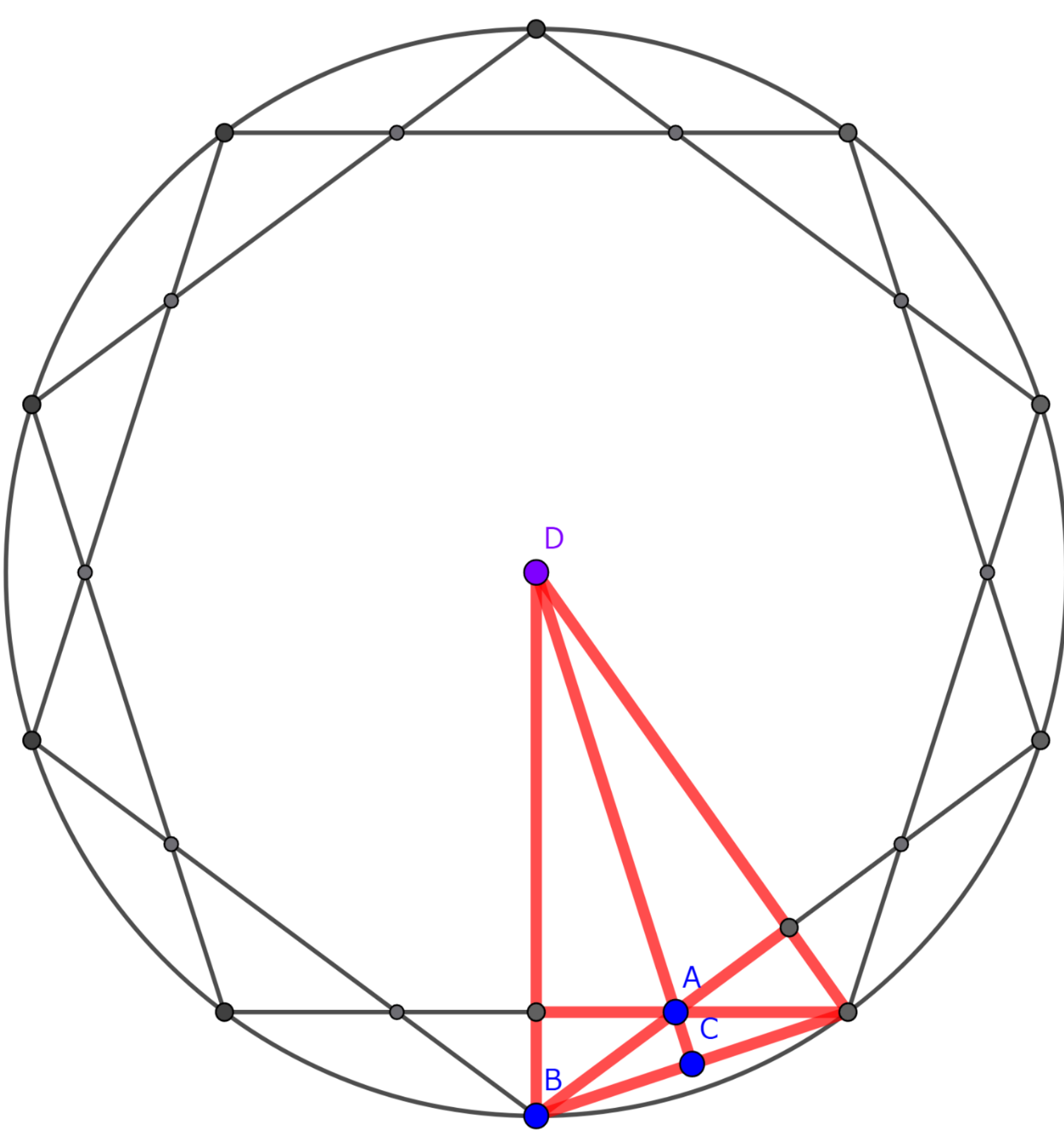
1. 円に内接する星形正多角形の性質を調べる

日常で星形の特徴を持つものを目にし、数学的に

2. GeoGebraでエピサイクロイドの軌跡を確認する どのような意味や性質をもつか気になったため

【研究動機】

星形正多角形の周の長さ と 面積



半径10の円に内接する星形正 n 角形を考え、星形正 n 角形の面積を S_n 、周の長さを ℓ_n とする。星形正 n 角形の一つの円周上の角の大きさは $\frac{n-4}{n}\pi$ である。また、 $\angle BDC = \frac{\pi}{n}$

したがって、 $\angle DBC = \frac{n-2}{2n}\pi$
ゆえに $BC = 10 \cos \frac{n-2}{2n}\pi$ とかける
 $\angle ABC = \angle DBC - \angle DBA$

$$= \frac{n-2}{2n}\pi - \frac{n-4}{2n}\pi = \frac{\pi}{n}$$

$$BC = AB \cos \frac{\pi}{n}$$
$$AB = 10 \frac{\cos \frac{n-2}{2n}\pi}{\cos \frac{\pi}{n}} = 10 \tan \frac{\pi}{n}$$

$$S_n = 10 \times 10 \tan \frac{\pi}{n} \times \sin \frac{n-4}{2n}\pi \times \frac{1}{2} \times 2n$$

$$= 100 n \sin \frac{n-4}{2n}\pi \tan \frac{\pi}{n}$$

また図形の周の長さは $\ell_n = 2n \tan \frac{\pi}{n}$ とかける。

ここで星形正多角形の面積 S_n と辺の長さ ℓ_n についての極限を考える。

$$\frac{\pi}{n} = \theta \text{ とおくと } n \rightarrow \infty \text{ のとき } \theta \rightarrow 0$$

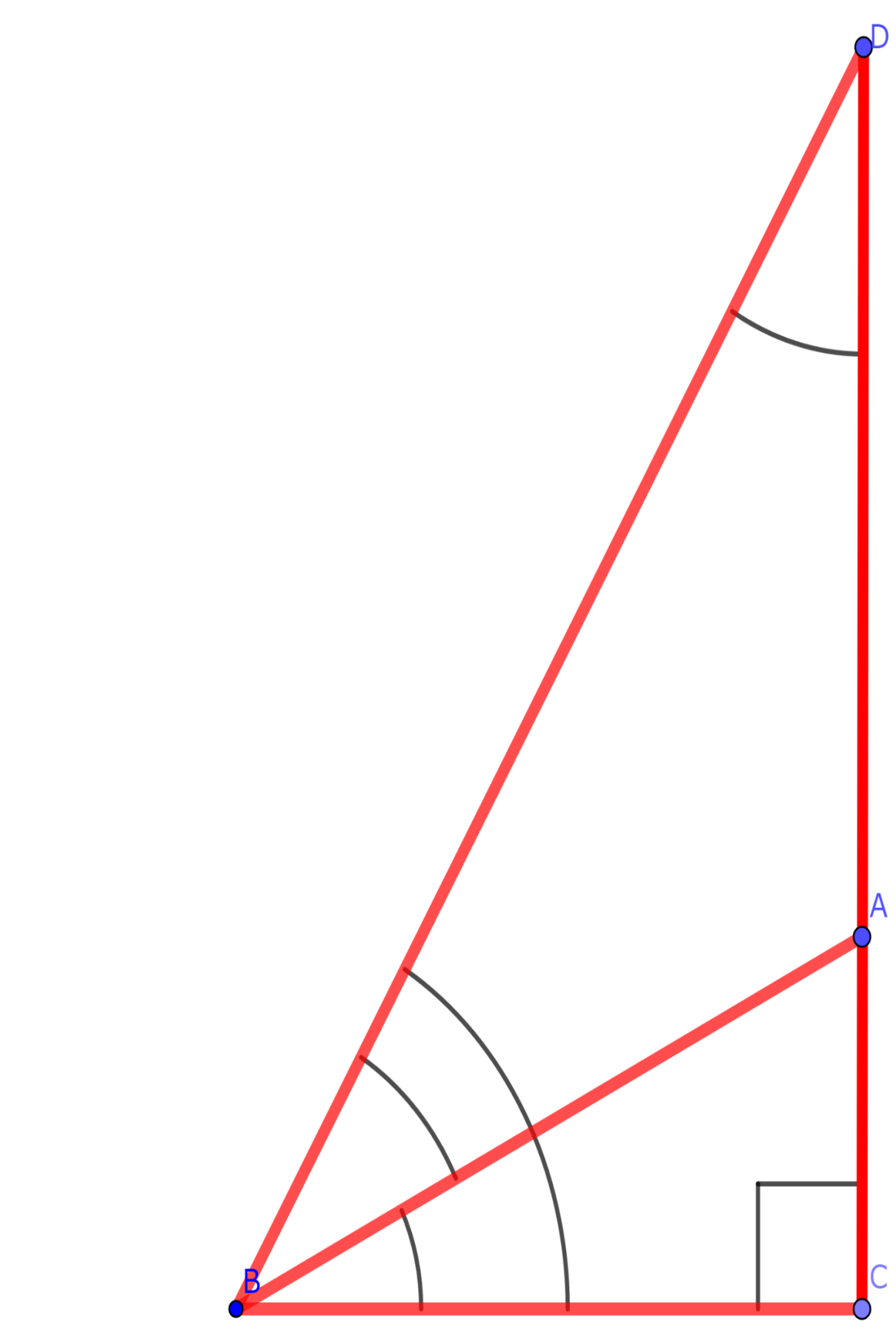
$$2n \tan \frac{\pi}{n} = 2 \frac{\pi}{\theta} \tan \theta = 2 \frac{\pi}{\theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2 \cdot \frac{\pi}{\cos \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 100 n \tan \frac{\pi}{n} \sin \frac{1-\frac{4}{n}}{2}\pi = 100\pi$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 100\pi$ この値は半径が10の円の面積に一致する。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = 20\pi$ この値は半径が10の円の円周と一致する。



内側に星形正多角形を作っていくときにできる図形の面積ともとの図形の面積の比

$$\angle ABP = \frac{2}{n}\pi$$

$$BP = \tan \frac{\pi}{n} \cos \frac{2}{n}\pi$$

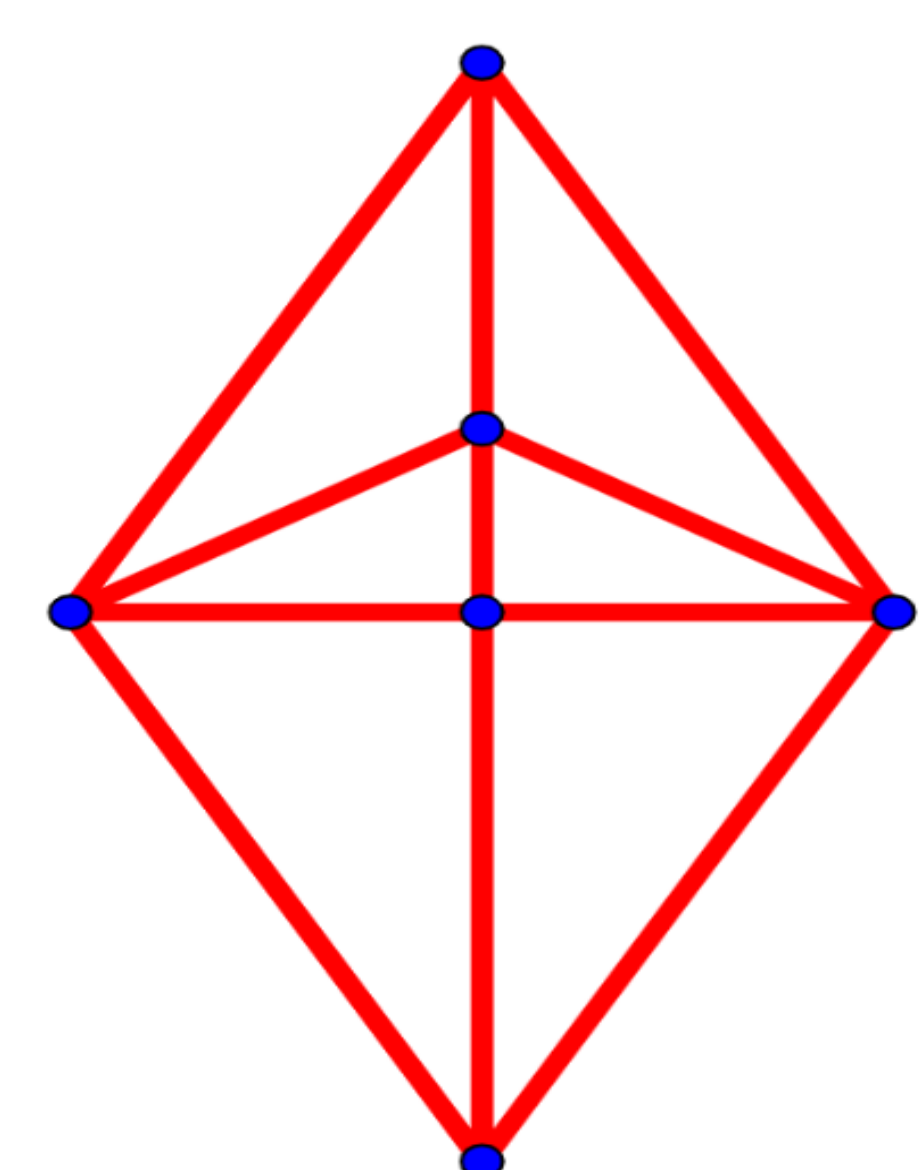
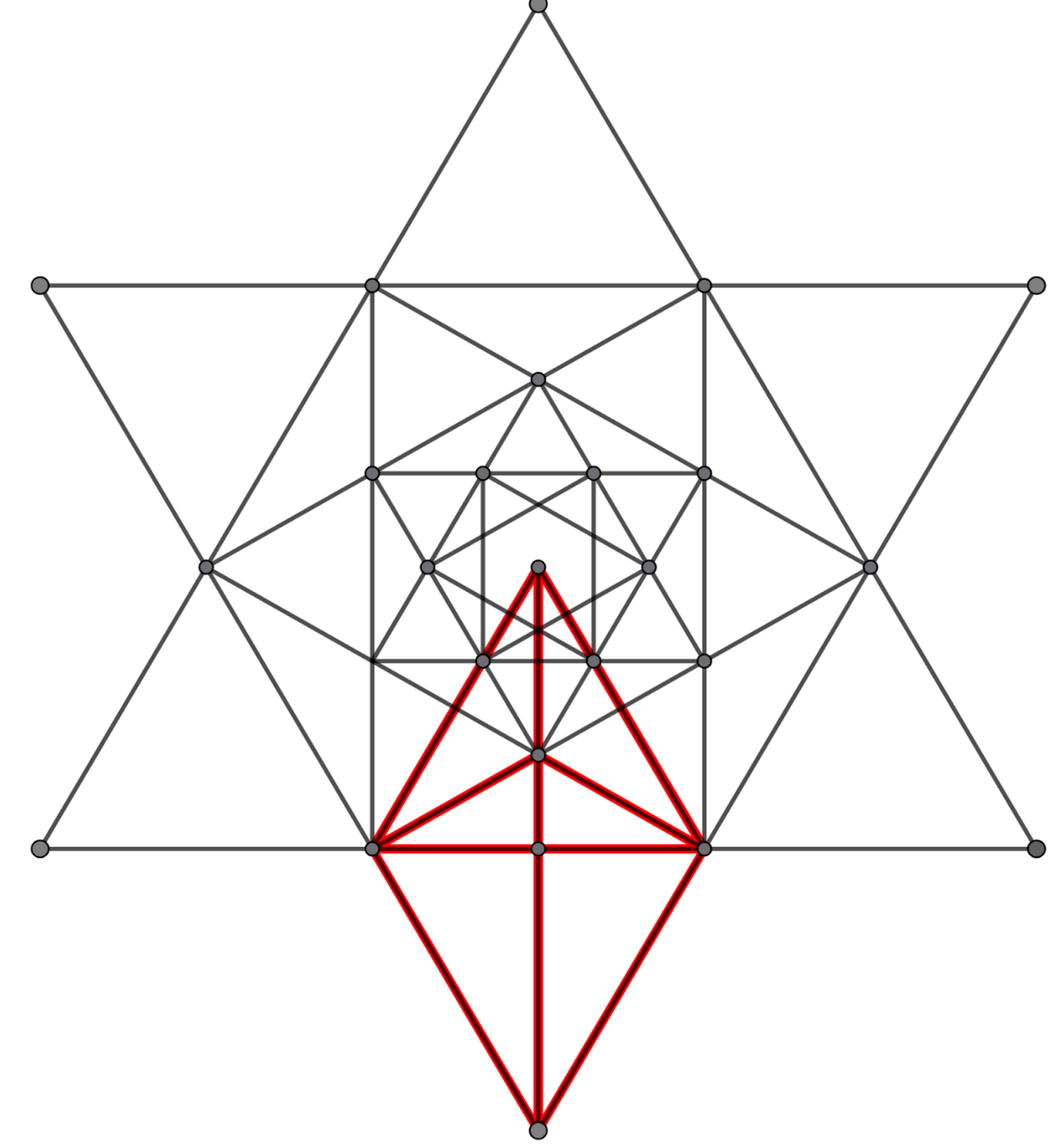
$$\angle PQB = \frac{n-2}{n}\pi$$

$$BQ \times \sin \frac{n-2}{n}\pi = \tan \frac{\pi}{n} \cos \frac{2}{n}\pi$$

$$BQ = \frac{\tan \frac{\pi}{n} \cos \frac{2}{n}\pi}{\sin \frac{n-2}{n}\pi}$$

よって外側(p)と内側(q)の相似比は $p : q = 1 : \frac{\cos \frac{2}{n}\pi}{\sin \frac{n-2}{n}\pi} = 1 : \frac{1}{\tan \frac{2}{n}\pi}$

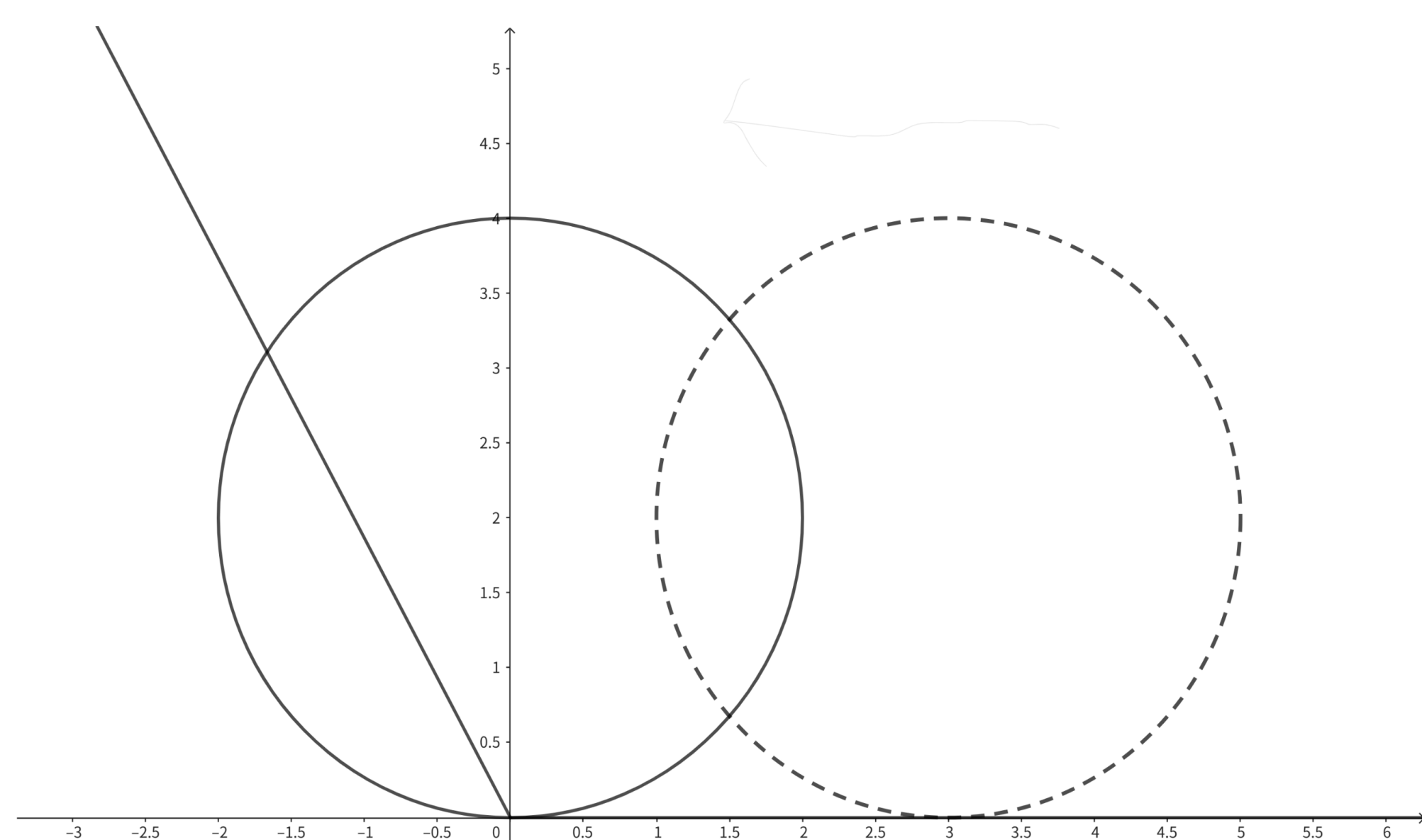
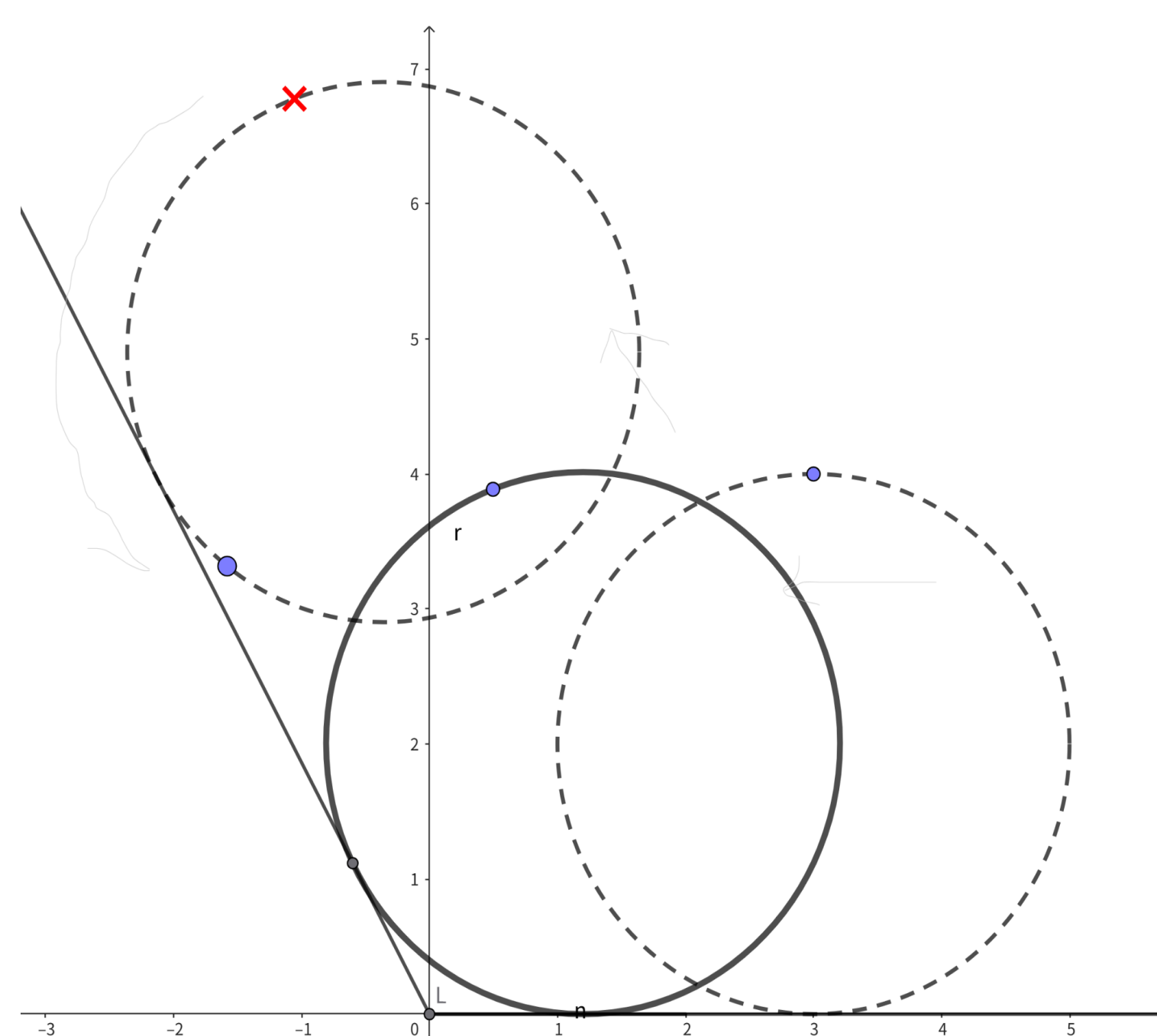
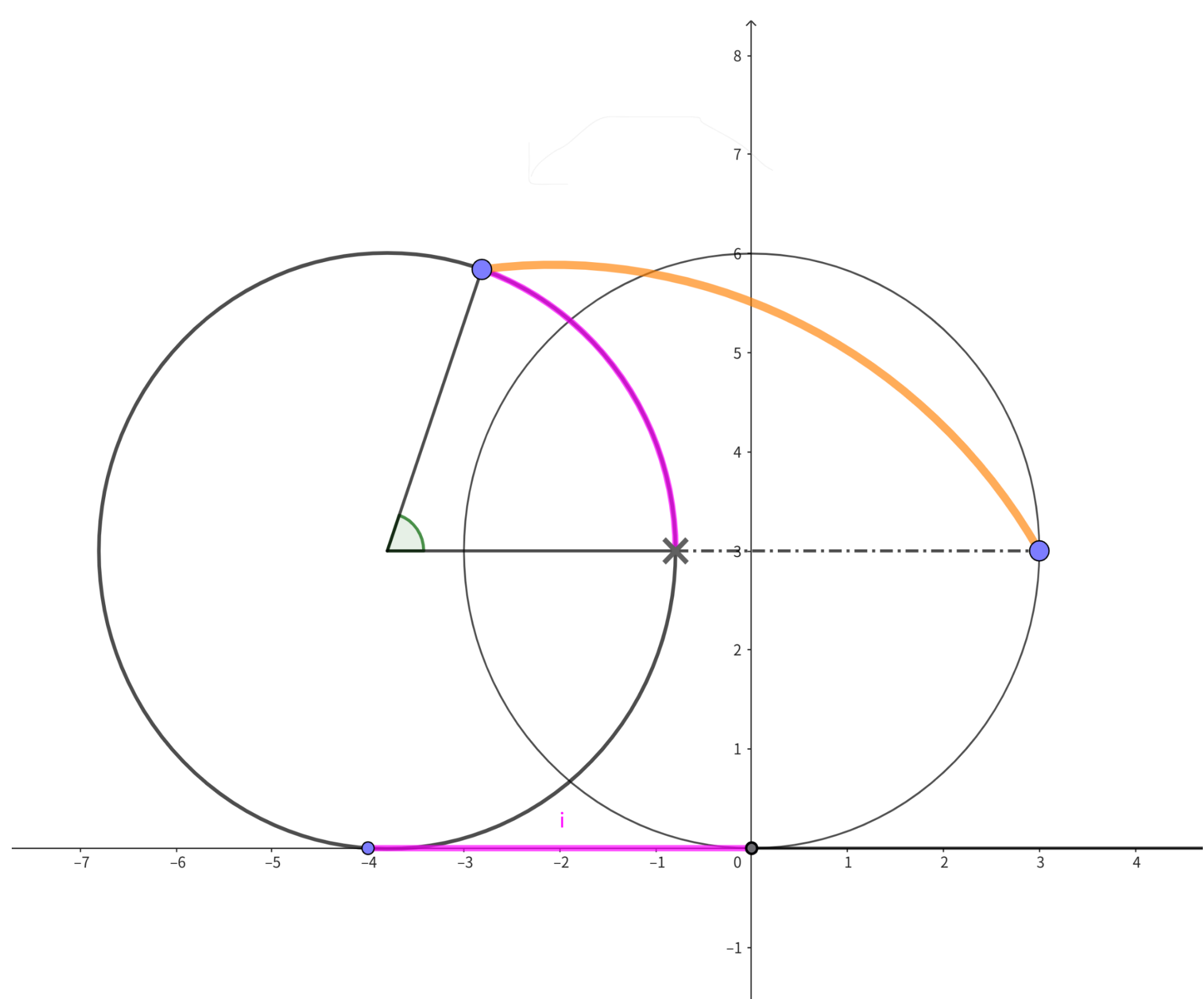
また外側(p)と内側(q)の面積比は $p : q = 1 : \frac{1}{\tan^2 \frac{2}{n}\pi}$



エピサイクロイド

【作成方法】

GeoGebraでエピサイクロイドを作成するにあたって、媒介変数表示を使用、また実際に円を回転させずにサイクロイドを作成した。我々は円を回転させずスライドだけさせ、軌跡を求める点自体をサイクロイドの時と同じ挙動になるように動かして、その点の軌跡を調べた。



【軌跡を求める点のやり方】

1. **円の中での位置的な関係でみた始点**
2. **回転した角度： θ = 円の移動距離/半径**
3. **その時点での円の中心の点**

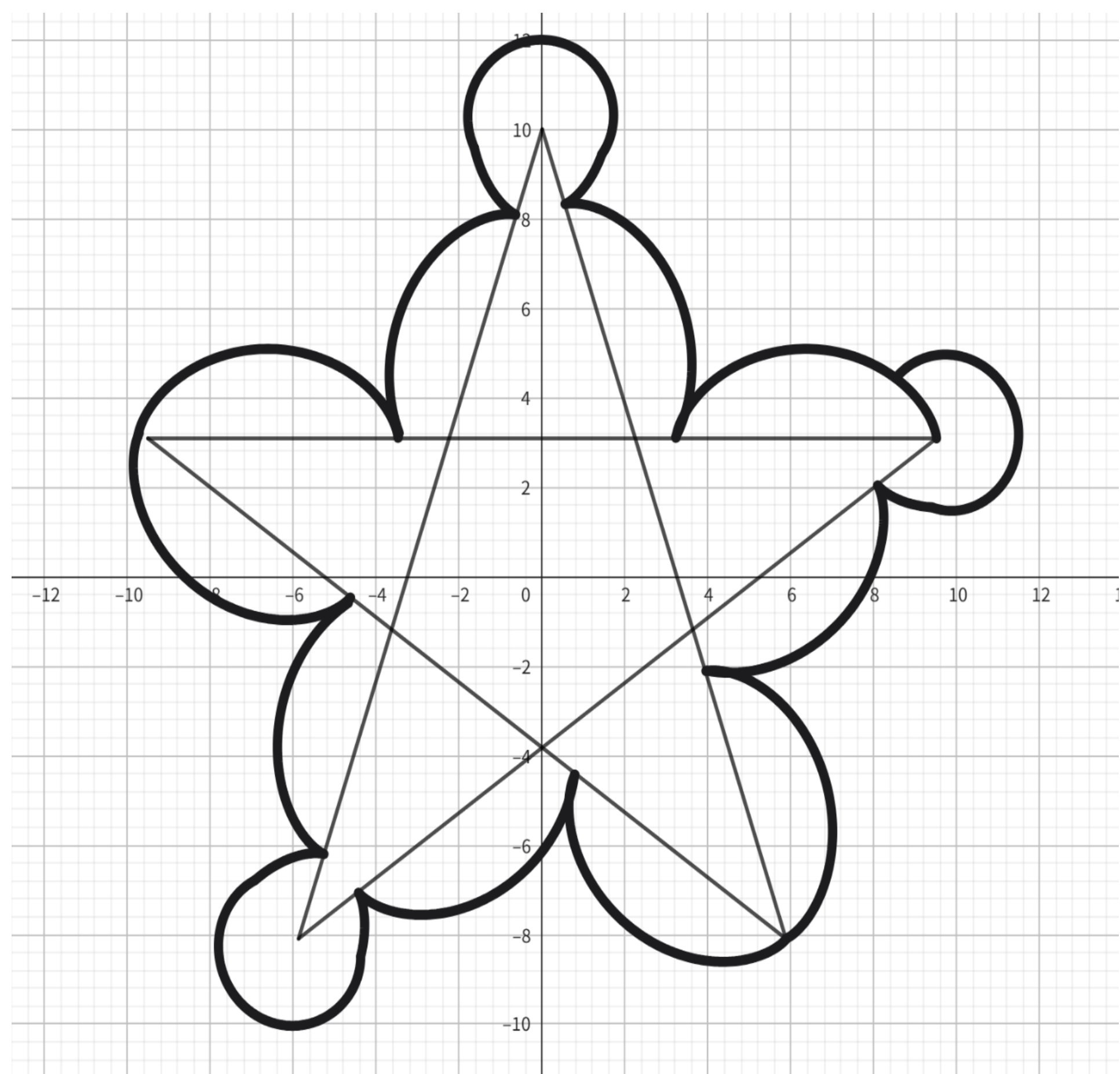
実際に我々は以下のように定義し、作成した。

軌跡の点 = **円の中での位置的な関係でみた始点** から θ だけ **その時点での円の中心の点** を中心に半径1の線分を回転させたところにある点

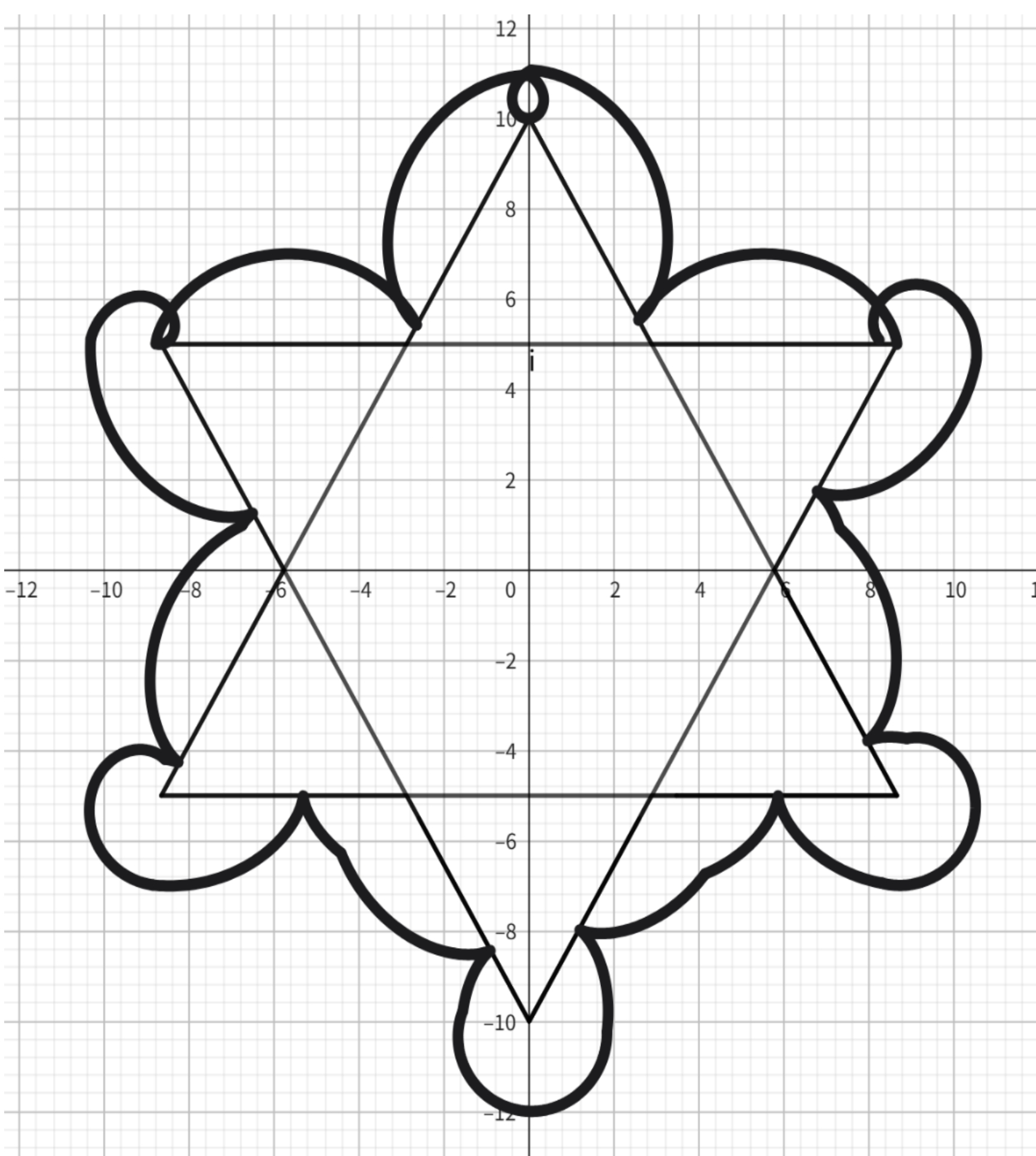
そして我々は、GeoGebraの仕様上の問題で辺ごとに円を置き、ひとつ前の円上にある軌跡の点の終点を次の円での始点とし、上記の手順で作っていった。

【結果と考察】

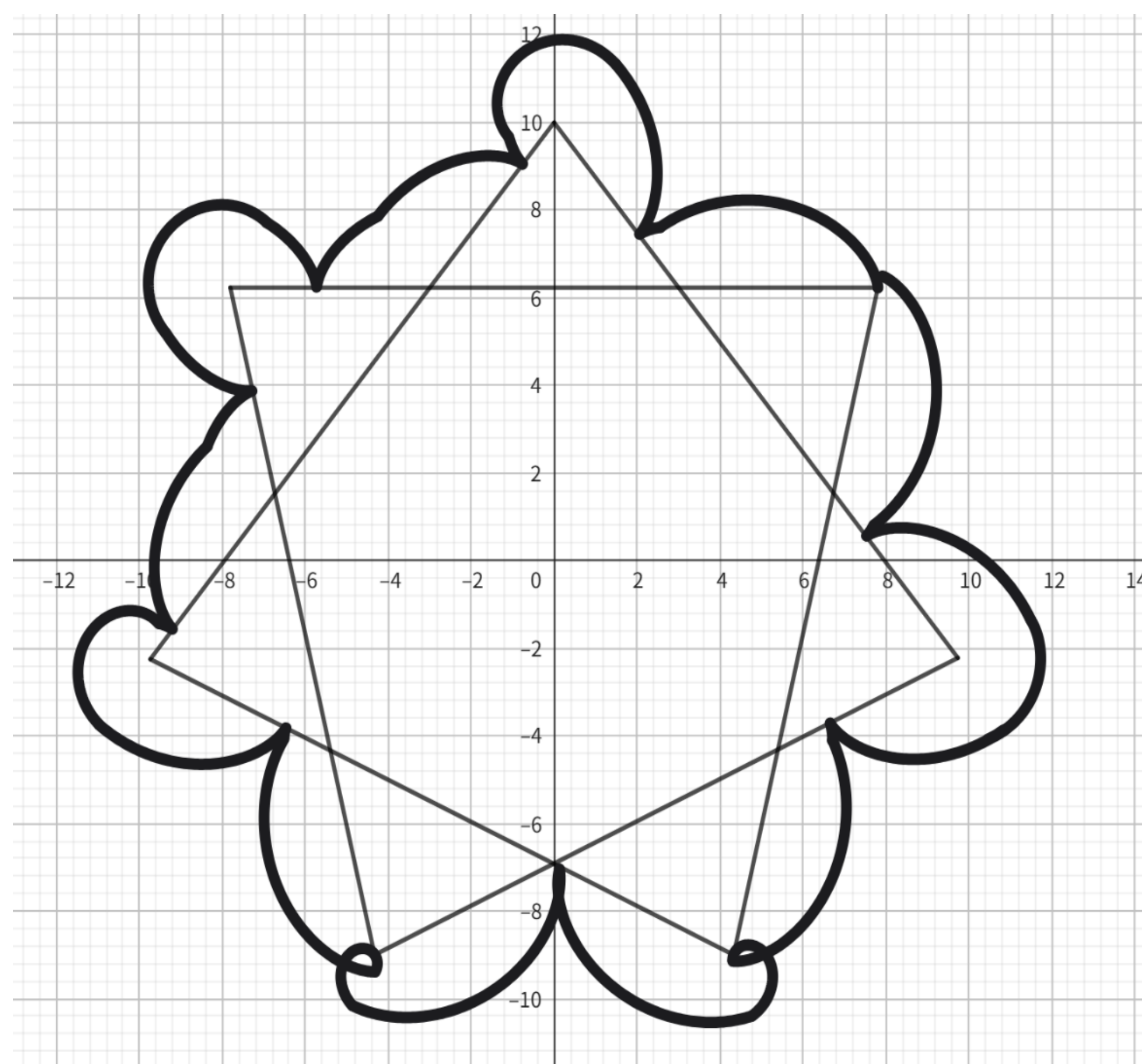
星形正多角形の面積と周の長さを一般化することができたがサイクロイドの軌跡の始点と終点が揃わなかった。しかし $n = 5 \sim 7$ のときいずれも多少の対称性が見られ、特に $n = 6$ の場合は対称性が強くみられる。今後の展望としては n の値を増やしていったサイクロイドの形状を調べ規則性を探し、またサイクロイドによる通過領域の面積と周の長さも求めたい。加えて、星形以外の図形の面積や周の長さ、サイクロイドの形状などが今後の研究テーマとするのが望ましい。



星形正五角形



星形正六角形



星形正七角形