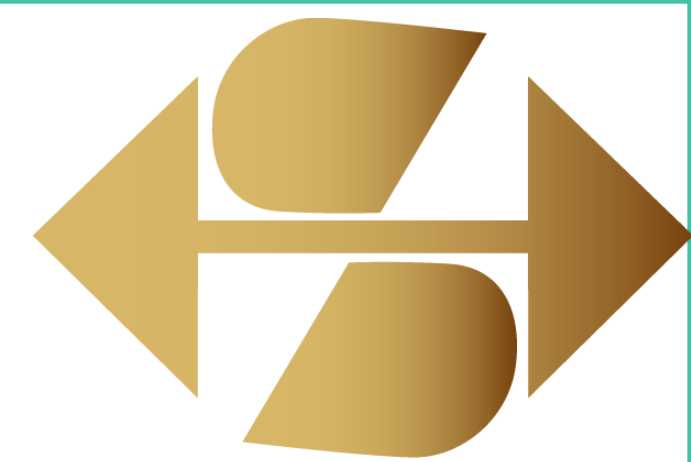


反パスカル的三角形の有限性



作新学院高等学校

阿久津雄大

古内誉

塚原涼介

鈴木奏

菊地絢女

手塚恒兵

[研究動機]

反パスカル的三角形は、2018年の国際数学オリンピックの第3問として出題された。先行研究は一件のみで、特に6段以上の三角形は存在しないと予想されているが、厳密な証明は示されていない。本研究ではその存在不可能性を数学的に証することを目的とする。

[反パスカル的三角形の定義]

n段の反パスカル的三角形は、各段が上から1個、2個、…n個の自然数で構成され、1から順に一度しか使用されず、最下段を除く各数が直下の2数の絶対値の差で表される。

[性質]

- ・1～nは各段に入る・各段の最小値の和は最大値に等しい・各段の最小値と最大値は隣り合う
- ・最下段の最小値と最大値で分けてできる反パスカル的三角形に1～nは含まれない

[証明1] (範囲の絞り込み)

n段の反パスカル的三角形Tについて考える。
Tのk段目($k > 2$)の隣接する2項 a_k, b_k ($a_k < b_k$), その上の項 b_{k-1} について、
$$b_k = a_k + b_{k-1}$$

$a_{k-1} < b_{k-1}$ となる a_{k-1} がとれる範囲で繰り返し適用すると

$$b_k = a_k + a_{k-1} + \dots + a_2 + a_1$$

このとき上段の最大値より大きい数が下段に必ず現れることと、n段にはn個の数字で同じ数は一度しか使えないことを考慮すると、最下段の最大値 M_n は

$$M_n = \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n a_k$$

このことから1～nは各段に含まれること、各段の最大値と最小値は隣り合うことが分かる。

ここでTの最下段の最大値と最小値を除き分割してできる、もとのTに含まれる反パスカル的三角形 T' について考える。最大と最小が隣り合うことから T' は最大2つできる。

T' の最大値について、どちらの最大値も M_n より小さいことがTが存在する必要条件である。つまり少なくとも T' の最大値の和の平均が M_n より小さくなくては行けない。

また上での議論から T' に1～nの数は含まれず、 T' の最大値の和は $n-2$ 個の項の和で表される。よって、 T' の最大値の和の平均 M'_n は以下のようにあらわせる。

$$M'_n \geq \frac{1}{2} \{(n+1) + (n+2) + \dots + (2n-2)\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-2} (n+k)$$

$M_n > M'_n$ より

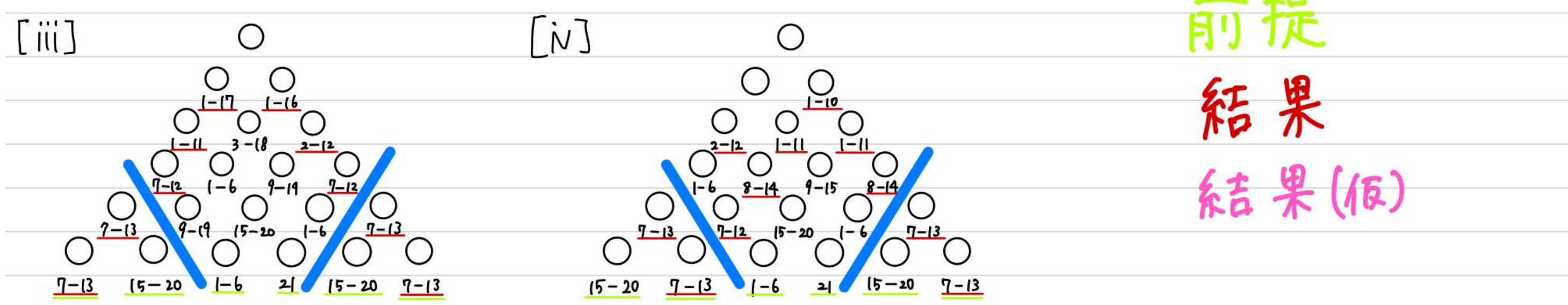
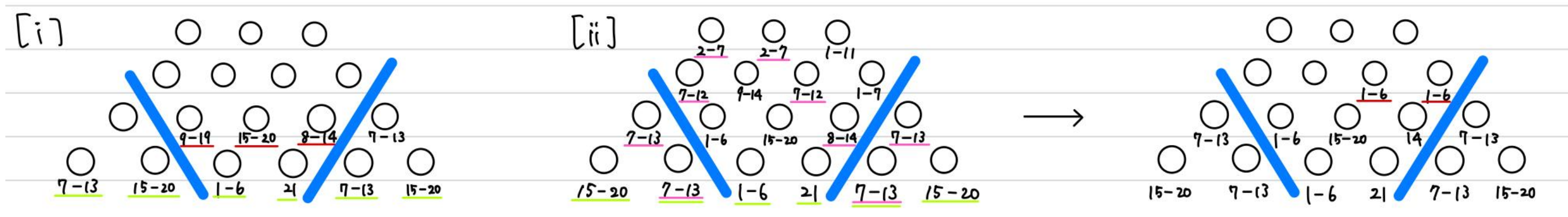
$$\sum_{k=1}^n k > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-2} (n+k) \quad \therefore \frac{9-\sqrt{73}}{2} < n < \frac{9+\sqrt{73}}{2}$$

nが自然数であることに注意して

$$1 \leq n \leq 8$$

よって反パスカル的三角形が存在しうるのは1段から8段のときである

[証明2] (6段が存在しないこと)



前提
結果
結果(仮)

[結論]

以上より反パスカル的三角形は1から5段まで存在し、その数は12個であること(左右反転したものは除く)、6段以上では反パスカル的三角形が存在しないことを証明できた。

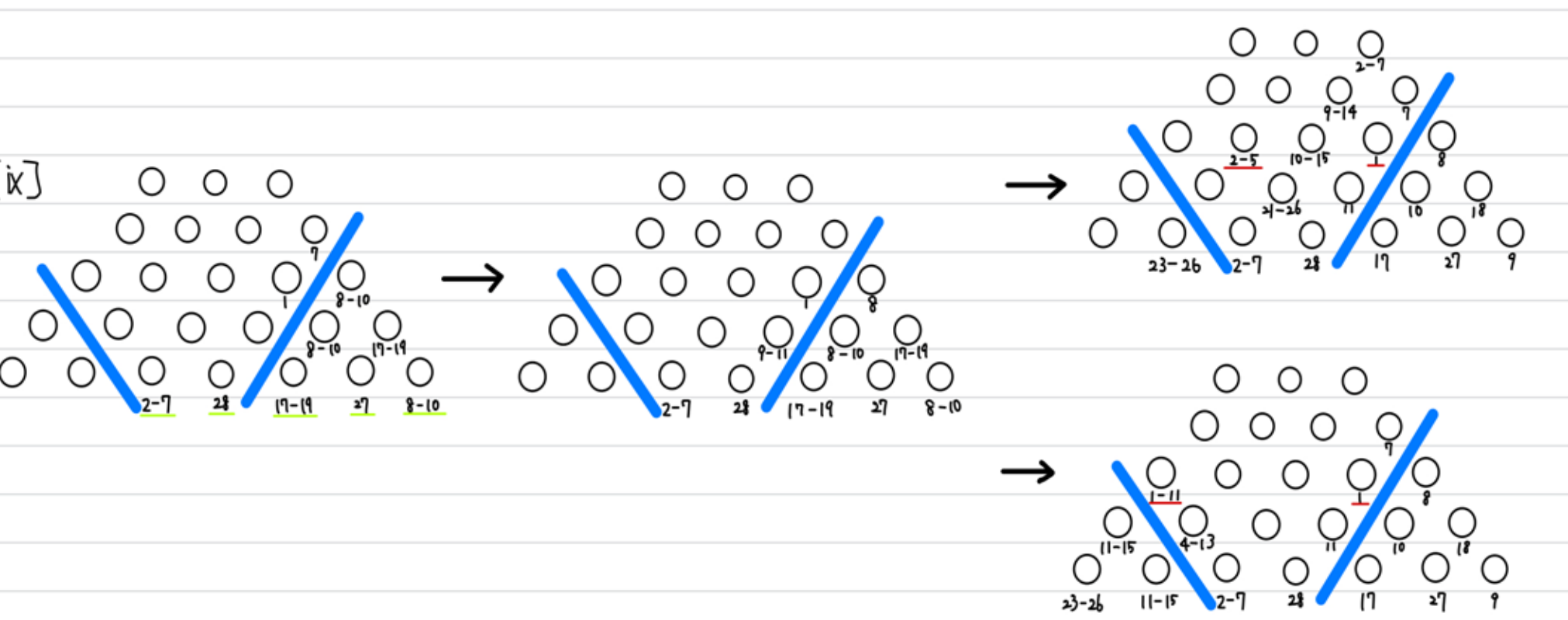
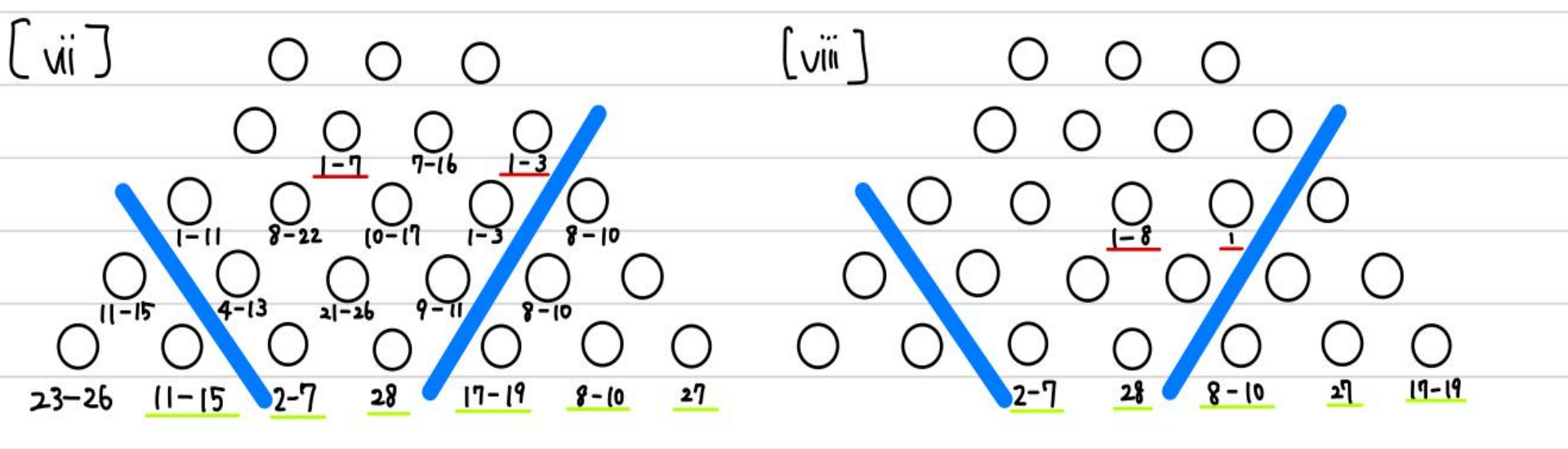
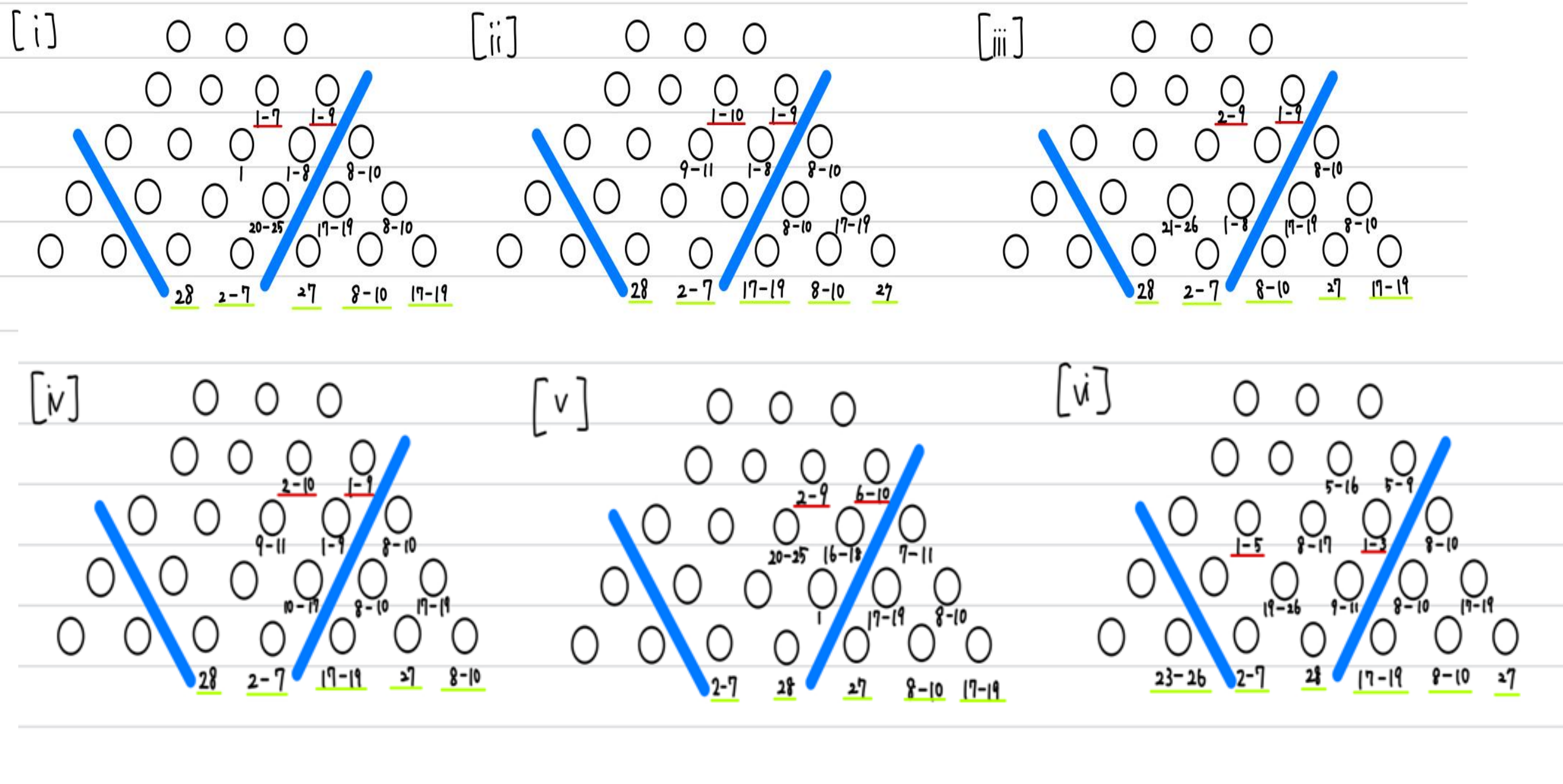
今後は今回用いた方法のみならず、他の数学的アプローチを用いた証明方法についても検討していく必要がある。

段数	1	2	3	4	5	6以上
存在	1	2	4	4	1	×

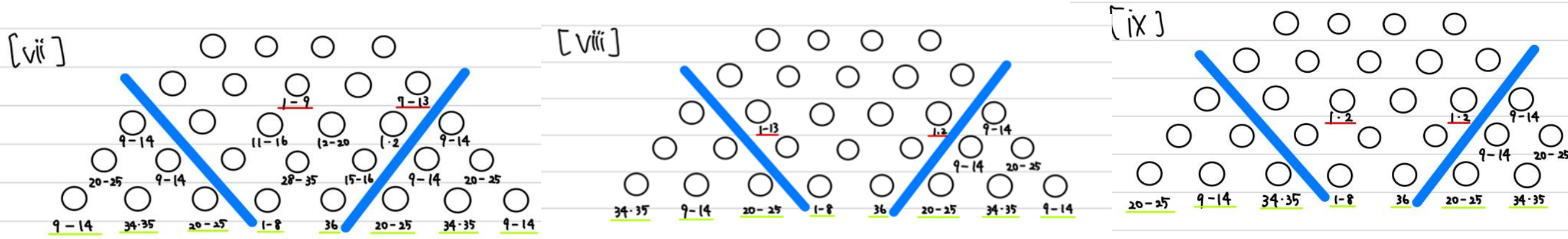
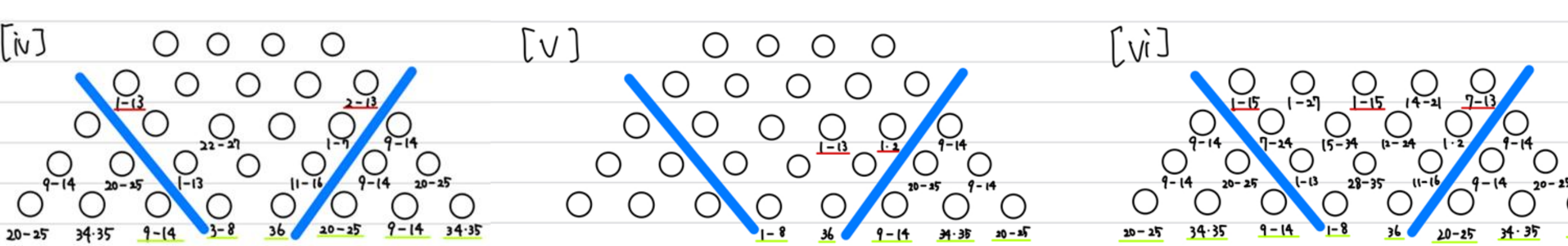
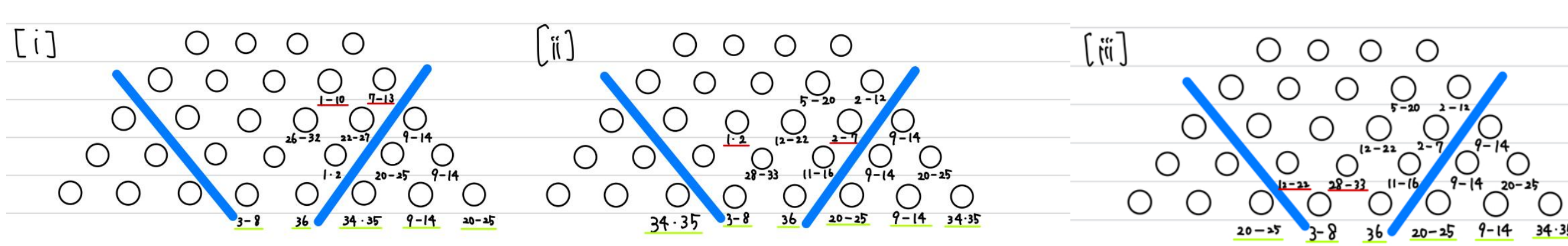
4段の例

4
2 6
5 7 1
8 3 10 9

[証明3] (7段が存在しないこと)



[証明4] (8段が存在しないこと)



[証明5] (全探索)

コンピューターを使った全探索によって、1段から5段までは反パスカル的三角形が存在してその数は12個のこと、また6から8段では存在しないことを確かめた

1段	2段	3段	4段	5段
1	1 2	3 2 4	5 2 4 1	6 1 2 3 4
	2 3	1 3	1 6 4	2 6 5
			2 6 5	4 1 6
				5 2 6
4段	3	3	4	4
	4 7	5 2	2 6	5 1
	5 9 2	4 9 7	5 7 1	2 7 6
	6 1 10 8	6 10 1 8	8 3 10 9	8 10 3 9
				8 1 12 10
				6 14 15 3 13

[参考文献]

神奈川県立横浜緑ヶ丘高等学校「特定条件下における反パスカル的三角形は何段まで存在するか？」
2018年国際数学オリンピック