循環小数の考察～余りの式による考察～

作新学院高等学校

渡邊　塁　　八月朔日　洸晴　　飯高　晴斗　　田中　美好

≪研究動機≫

循環小数の性質を求めたい。そのために循環の幅や循環小数を余りの式で表示し，これを考察する。

≪循環小数の循環の幅について≫

繰り返される数字の列を循環の幅という。

$\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$　　循環の幅　1

$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$　　循環の幅　6

$\frac{1}{13} = 0.\dot{0}7692\dot{3}$　　循環の幅　6

$\frac{1}{17} = 0.\dot{0}58823529411764\dot{7}$　　循環の幅　16

～考察～

全ての位が９の n 桁の自然数がある。その自然数の素因数の逆数に，循環の幅が n であるものが存在すると考察する。

≪循環小数の余りの式での表示≫

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

①１を７で割ったときの余りをだす。

②でた余りを 10 倍してその数を 7 で割ったとき余りを求める。

$$\begin{array}{ll}
1 \times 10 = 7 \times 1 + 3 & 3 = 1 \times 10 - 7 \times 1 \\
3 \times 10 = 7 \times 4 + 2 & 2 = 3 \times 10 - 7 \times 4 \\
2 \times 10 = 7 \times 2 + 6 & 6 = 2 \times 10 - 7 \times 2 \\
6 \times 10 = 7 \times 8 + 4 & 8 = 6 \times 10 - 7 \times 8 \\
4 \times 10 = 7 \times 5 + 5 & 5 = 4 \times 10 - 7 \times 5 \\
5 \times 10 = 7 \times 7 + 1 & 1 = 5 \times 10 - 7 \times 7 \\
1 \times 10 = 7 \times 1 + 3 & 3 = 1 \times 10 - 7 \times 1 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

$$r_1 = p \times 0 + r_1$$

$$10r_1 = p \times q_1 + r_2$$

$$10r_2 = p \times q_2 + r_3$$

$$\vdots$$

$$10r_{n-1} = p \times q_{n-1} + r_n$$

$$\vdots$$

（ただし $p \neq 2, 5$ の素数，r_n, q_n はともに自然数で $1 \leq r_n \leq p-1$，$1 \leq q_n \leq 9$ を満たす。）

上の余りの式において，第 n 項目の余りが現れる式を n 番目の式と呼ぶことにする。

≪二項間漸化式≫

２番目の式から n 番目の式について考える。

$$10r_1 = p \times q_1 + r_2$$

$$10r_2 = p \times q_2 + r_3$$

$$\vdots$$

$$10r_{n-1} = p \times q_{n-1} + r_n$$

両辺整数値をとるので，p を法とした合同式を考えると

$$10r_1 \equiv r_2 \pmod{p}$$

$$10r_2 \equiv r_3 \pmod{p}$$

$$\vdots$$

$$10r_{n-1} \equiv r_n \pmod{p}$$

と表せる。すべての式の両辺を掛け合わせると

$$10^{n-1} r_1 r_2 \cdots r_{n-1} \equiv r_2 r_3 \cdots r_{n-1} r_n \pmod{p}$$

共通部分を消去すると

$$10^{n-1} r_1 \equiv r_n \pmod{p}$$

が得られる。

≪三項間漸化式≫

$$10r_1 = p \times q_1 + r_2$$
$$10r_2 = p \times q_2 + r_3$$
$$10r_3 = p \times q_3 + r_4$$
$$\vdots$$
$$10r_n = p \times q_n + r_{n+1}$$
$$10r_{n+1} = p \times q_{n+1} + r_{n+2}$$

ここで

$$10r_n = p \times q_n + r_{n+1} \cdots ①$$

$$10r_{n+1} = p \times q_{n+1} + r_{n+2} \cdots ②$$

すると②－①より

$$10(r_{n+1} - r_n) = p(q_{n+1} - q_n) + r_{n+2} - r_{n+1}$$

p を法とした合同式を考えると

$$10r_{n+1} - 10r_n \equiv r_{n+2} - r_{n+1} \pmod{p}$$
$$0 \equiv r_{n+2} - 11r_{n+1} + 10r_n \pmod{p}$$

$t^2 - 11t + 10 = 0$ とすると

$$t^2 - 11t + 10 = 0$$
$$(t-1)(t-10) = 0$$
$$t = 1, 10$$

よって三項間漸化式はr_1, r_2を用いて

$$r_{n+1} - r_n \equiv 10^{n-1}(r_2 - r_1) \pmod{p} \cdots ③$$

$$r_{n+1} - 10r_n \equiv 1^{n-1}(r_2 - 10r_1) \pmod{p} \cdots ④$$

③－④より

$$r_n \equiv \frac{r_2 - 10r_1 - 10^{n-1}(r_2 - r_1)}{9} \pmod{p}$$

≪利用法≫

$r_n \equiv r_1 \times 10^{n-1} \pmod{p}$ が成り立つこと利用して，小数第 n 位の q_n を求める。

r_n, r_{n+1} を求めて

$$r_n \equiv r_1 \times 10^{n-1} \pmod{p}$$
$$r_{n+1} \equiv r_1 \times 10^{n} \pmod{p}$$

第 n 位の余りの式より

$$10r_n = p \times q_n + r_{n+1}$$

求めたr_n, r_{n+1}を用いて， q_n の値を求める。

≪今後の展望≫

循環小数を余りの式に直すことで，一部の既約分数における循環小数について，余りの式で表すことができた。また，その余りの式を数列と考え，二項間，三項間漸化式を用いて，余りの一般項を求めた。

しかし，商の一般項を求めるに至らなかったため，今後の研究では商の一般項を求めるための考察を深めていきたい。また，すべての既約分数についての余りの一般項を求めていきたい。そして， $r_i = r_1 10^{i-1}$ という式はN進法で $r_i = r_1 N^{i-1}$（$i \in \mathbb{N}$）と表せると予想しているので，証明できるようにしていきたい。

≪参考文献≫

・藤田岳彦編，『数学 A,B 改訂版』，啓林館，2017.

・チャート研究所編著，『増補改訂版チャート式基礎からの数学Ⅱ＋B』，数研出版，2019.

発表の様子は，こちらの QR から視聴可能です。是非ご覧下さい。質疑応答は，以下のアドレスで受け付けています。

masaki.kurokawa@sakushin.ac.jp